Théorie des Anneaux

Sujets de mémoire

A. Leroy

I) Les V-anneaux

Un anneau R est un V-anneau (en l'honneur de Villamayor) à droite si tous les R-modules à droite simples sont injectifs.

Un anneau R est un PCI-anneau à droite si tous les modules à droite propres (c-à-d différent de R lui-même) sont injectifs.

Pour motiver ces définitions remarquons que dans le cas commutatif, les V-anneaux sont les anneaux de Von Neumann regulier (introduits par Von Neumann dans son livre "continuous geometry") mentionnons aussi le résultat d'Osofsky : Un anneau est semi-simple (artinien) si et seulement si tous ses modules cycliques à droite sont injectifs.

Ces anneaux on été étudiés par Cozzens, Faith, Osofsky, Resco,...

Un article en préparation étudie les conditons pour qu'une extension de Ore du type $R = K[x; \sigma,\delta]$ où K est un corps gauche, soit un V-anneau. La raison de cette étude est que d'une part Cozzens a construit un V-domaine du type $k[x; id.,\delta]$ (où k est un corps différentiellement clos) et d'autre part on ne sait toujours pas s'il existe un V-domaine à gauche qui ne soit pas un V-domaine à droite.

Le but de ce mémoire sera de lire les articles cités ci-dessous et de comprendre l'impact de ces papiers dans le cadre de la théorie des anneaux.

Bibliographie

1. P.M. Cohn; Skew Fields, Cambridge University Press.
2. J. Cozzens, C. Faith; Simple noetherian rings, Cambridge university press, 1975.
3. R.D. Resco; Division rings and V-domains, Proc. Amer. Math. Soc. **99** (1987), 427-431.
4. B. Osofsky; Injective modules over twisted polynomial rings, Nagoya Math. J. **110** (1990), 107-114.
5. T.Y. Lam, A. Leroy, S.K. Jain; V-domain and Ore extensions, en préparation.

II) Anneaux duos et quasi duos

Un anneau R est duo à droite si tous les idéaux à droite de R sont bilatères.

Un anneau R est faiblement duo à droite si pour tout $r \in R$, il existe $n(r) \in \mathbb{N}^*$ tel que l'idéal $r^{n(r)}R$ est bilatère.

Un anneau R est quasi-duo à droite si tous les idéaux maximaux à droite de R sont bilatères.

On a : duo $\Longrightarrow$ faiblement duo $\Longrightarrow$ quasi-duo.

Des articles récents de G. Marks, J. Matczuk, T.Y. Lam et Dugas ont donnés de nouveaux exemples notemment dans la famille des extensions de Ore $R[x;\sigma,\delta]$.

Une question reste ouverte : On ne sait toujours pas s'il existe des anneaux quasi-duos à droite qui ne sont pas quasi-duos à gauche.

Le travail consistera à étudier les propriétés mentionnées ci-dessus en s'intéressant particulièrement aux extensions de Ore.

Bibliographie

1. T.Y.Lam, Dugas; Journal of pure and applied algebra **195** (2005), 243-259.
2. G.Marks; Duo rings and Ore extensions, J. Algebra **280** (2004), no. 2, 463-471.
3. J. matczuk; Ore extensions over duo rings, preprint
4. A.Leroy, G. Marks, J. Matczuk; Quasi duo Ore extensions, en préparation.

III) Fonctions symétriques non commutatives et quasi- déterminants

Au début des années 1990 Gelfand, Lascoux, Krob,... ont développé une théorie des polynômes symétriques en des variables non commutatives. Dans un premier articles les variables n'étaient pas utilisées. Seules les relations existants entre différents polynômes symétriques dans le cas commutatif étaient développées dans un cadre non commutatif (algèbre libre). En utilisant les quasi-déterminants de matrice de Vandermonde Wilson, Retakh et Gelfand ont introduits des indéterminées... D'autre part dans le cadre de l'évaluation des polynômes gauches T.Y. Lam et A. Leroy avaient en 1989 introduit des polynômes symétriques élémentaires mais n'avaient pas développé la théorie plus avant. En reprenant leur point de vue (dans le "cas classique" où l"indéterminée commute avec les coefficients) on peut facilement présenter les fonctions symétrique élémentaires non commutatives:

Soit k un corps commutatif, l'algèbre libre $k < x_1, \ldots, x_n >$ est un fir et peut donc se plonger dans un corps universel de fractions appelé corps libre a n indéterminés et noté $D := k(< x_1, \ldots, x_n >)$. L'anneau $D[t]$ est principal et les polynômes $t-x_1,\ldots,t-x_n$ admettent un plus grand commun multiple à gauche noté $[t-x_1,\ldots,t-x_n]$ en notant $a^c = cac^{-1}$ pour des éléments $a,c \in D$, on peut alors développer $[t-x_1,\ldots,t-x_n]$ en produit de facteurs et les coefficients de ce polynôme fournissent alors les fonctions symétriques élémentaires. Par exemple dans le cas où $n=2$ on a $[t-x_1,t-x_2] = (t-x_2^{x_2-x_1})(t-x_1) = (t-x_1^{x_1-x_2})(t-x_2)$ Les éléments du type $x_2^{x_2-x_1}$ et $x_1^{x_1-x_2}$ et apparaissant dans les factorisations de $[t-x_1,\ldots,t-x_n]$ sont appelés les pseudo racines. Les différentes factorisations font donc apparaître des relations entre les pseudo racines et traduisent le fait que l'on a des expressions symétriques.

R. Wilson a établi l'analogue du théorème fondamental commutatif "Tout polynôme symétrique est un polynôme en les polynômes symétriques élémentaires".

Une algèbre quadratique notée Q_n et basée sur les relations existant entre les pseudo racines a été introduite par Wilson, Retakh et Gelfand. Son étude est en relation avec les différe,tes factorisations de $[t-x_1,\ldots,t-x_n]$. Des propriétés homologiques de cet algèbre ont été données et il est conjecturé que cet algèbre se plonge dans le corps libre.

Le but du travail sera d'étudier les travaux de Gelfand, Retakh, Wilson... Les quasi-déterminants seront nécessaires. L'étude de Q_n et la compréhension de la conjecture seront demandées. Comprendre l'énoncé de l'analogue du théorème fondamental (pas la démonstrartion). On étudiera la place que semblent occuper les polynômes de Wedderburn dans la théorie.

Bibliographie

1. I. Gefand, S. Gelfand V. Retakh, R.L. Wilson; Quasideterminants, ArXiv:math. QA/0208146 v4 , (2004).
2. I. Gelfand, D. Krob, A. Lascoux, B. Leclerc, V. Retakh, J.Y. Thibon; Noncommutative symmetric functions , Advances in Math. **112** (1995), 218-348.
3. I. Gelfand, V. Retakh, R. Wilson; Quadratic linear algebras associated with decompositions of noncommutative polynomials and differential polynomials, Selecta Math. (N.S.) **7** (2001), 493-523.
4. I. Gelfand, V. Retakh; Noncommutative Vieta theorem and symmetric functions, The Gelfand Mathematical Seminars, 1993-1995, Gelfand Math. Sem., Birkhauser Boston, Boston, MA, 1996, pp. 93-100.
5. T.Y. Lam, A. leroy; Vandermonde and Wronskian matrices over divsion rings J. Algebra, 1989.
6. T.Y. Lam, A. leroy; Wedderburn polynomials, I Journal of Pure and Applied Algebra, 186 (2004) 43-76. 26
7. R.L. Wilson; Invariant polynomails in the free skew field, Selecta Math. **7** (2001).
8. B. Osofsky; Quasideterminants and right roots of polynomials over division rings, notes B. Osofsky's web page.

IV) Localisations universelles

Tout anneau commutatif intègre se plonge dans un corps : son corps des fractions. Il existe des anneaux non commutatifs intègres qui ne peuvent se plonger dans un corps (Malcev). Pire : il existe des anneaux intègres qui admettent des corps de fractions non isomorphes. P.M. Cohn a montré que si l'on veut obtenir une thèorie qui redonne l'unicité (dans une catégorie adéquate) et généralise bien le cas commutatif, il faut inverser des ensembles de matrices. Il a introduit les localisations par rapport à des idéaux de matrices (relativement a des opérations "somme diagonale"(qui joue en fait le role d'un produit) et "somme déterminantale"). Soit R un anneau la catégorie en question est celle des corps K pour lesquels il existe un morphime $\lambda : R \longrightarrow K$ telm que K est engendré comme corps par $\lambda(R)$. Les morphismes sont appelés spécialisations...peu importe! Dans le cas commutatif le noyau de $P := ker(\lambda)$ est idéal premier et permet de retrouver K de deux maniéres : soit K est considéré comme le corps résiduel de R_P soit K est considéré comme le corps des fractions de l'anneau intègre R/P. Dans le cas non commutatif la connaissance de $ker(\lambda)$ ne suffit pas pour déterminer K. En fait on a besoin de savoir quelles sont les matrices carrées à coefficients dans R dont l'image par λ sont des matrices singulières (à coefficients dans K). Ces matrices forment ce que Cohn appelle le noyau singulier... Voici quelques un des résultats obtenus par PM Cohn

1. P le noyau singulier de λ alors la localisation R_P est local et son corps résiduel est K
2. Les noyaux singuliers sont en bijection avec des idéaux premiers de matrices (définition via somme diagonale et déterminantale).
3. Tout fir est plongeable dans un corps universel de fractions.
4. Un anneau R est plongeable dans un corps de fractions si et seulement si $0 \neq R$ et aucune matrice diagonale a coefficients non nuls ne peut s'écrire comme somme déterminantal de matrices non pleines (une matrice carrée A de type $n \times n$ est dite non pleine s'il existe $r < n$ et P,Q de type $n \times r$ et $r \times n$ respectivement et tels que $A = PQ$)

Récemment Bergman a donné un autre point de vue sur la théorie de localisation des firs. Il utilise la notion de matroide...

Le but du mémoire est de comprendre la théorie de PMCohn et voir quel est l'apport du point de vue développé par Bergman.

Bibliographie

1. G. Bergman; Constructing division rings as module -theoretic direct limits, TAMS **354**, (2002), 2079-2114,
2. P.M. Cohn; Skew fields, theory of general division rings, Encyclopedia of mathematics and its applications **57**, Cambridge university,1995

3. T.Y.Lam; Lectures on Modules and Rings, GTM **189**.